7.7 多元函数的极值及其求法

一、 多元函数的极值

二、 条件极值,Lagrange乘数法

第七节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值及最大值、最小值

1. 多元函数极值的定义 （以二元函数为例）

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，对于该邻域内异于(x_0,y_0)的点(x,y)：若满足不等式$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数在(x_0,y_0)有极大值；若满足不等式$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称函数在(x_0,y_0)有极小值；

极大值、极小值统称为极值.

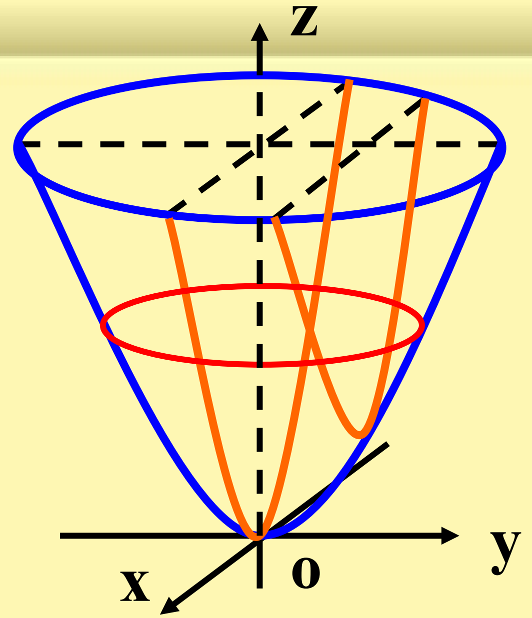
使函数取得极值的点称为极值点.

可类似定义 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值

例1　函数 $z = x^2 + y^2$

在 $(0,0)$ 处有极小值.

旋转抛物面



例２ 函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

在 $(0,0)$ 处有极大值.

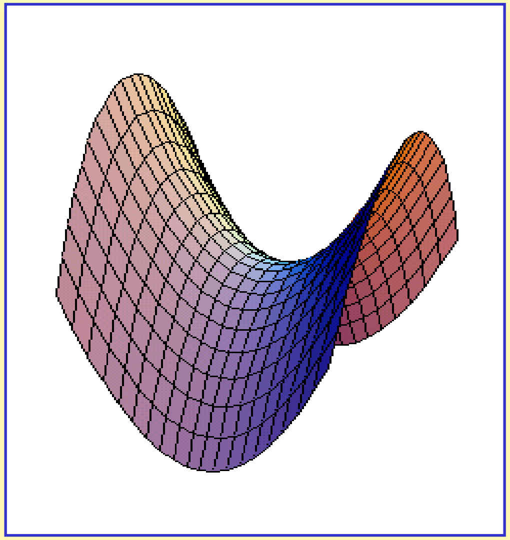
锥面

例３ 函数 $z = xy$

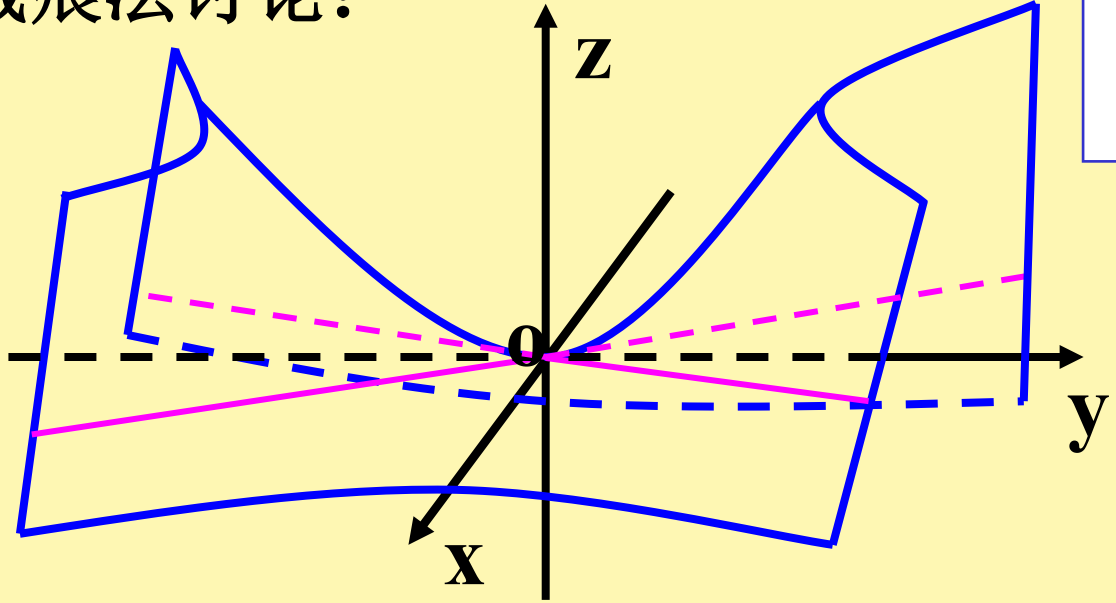
在 $(0,0)$ 处无极值.

双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=z$$ 双曲抛物面（马鞍面）



用截痕法讨论：



$$z=y^2-x^2=(y+x)\cdot(y-x)=x'y'$$

2、多元函数取得极值的必要条件

定理 1（必要条件）

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：　$f_x(x_0,y_0)=0$，　$f_y(x_0,y_0)=0$.

证　不妨设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有极大值，

则对于(x_0,y_0)的某邻域内任意

$(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 都有$f(x,y)<f(x_0,y_0)$,

故当$y=y_0$，$x\neq x_0$时，有$f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$,

故当$y = y_0$，$x \neq x_0$时，有$f(x, y_0) < f(x_0, y_0)$,

说明一元函数$f(x, y_0)$在$x = x_0$处有极大值,

必有 $f_x(x_0, y_0) = 0$;

类似地可证 $f_y(x_0, y_0) = 0$.

推广 如果三元函数$u = f(x, y, z)$在点$P(x_0, y_0, z_0)$具有偏导数，则它在$P(x_0, y_0, z_0)$有极值的必要条件为

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0,$$
$$f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

仿照一元函数，凡能使一阶偏导数同时为零的点，均称为函数的**驻点**.

定理 1 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$

注（1）函数的驻点不一定是极值点，例如，点(0，0)是函数$z=xy$的驻点，但函数在该点并无极值。

（2）函数的极值点不一定是驻点，偏导数不存在的点仍可能为极值点。

例（1）中$z=-\sqrt{x^2+y^2}$在(0,0)处取得极大值，但它在(0,0)处的偏导数不存在。

（3）可能极值点：（i）驻点（ii）偏导数不存在的点

（4）几何意义：若$z=f(x,y)$的偏导存在，

且(x_0,y_0)为极值点

$$\Rightarrow f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$$

则曲面$z = f(x, y)$在(x_0,y_0, z_0)处的切平面方程为：

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

即：$z=z_0$

若偏导数存在，极值点处的切平面平行于xoy面。

问题：如何判定一个驻点是否为极值点？

3．极值的充分条件

定理 2 （充分条件）设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，

又 $f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$，令 $f_{xx}(x_0, y_0)=A$，$f_{xy}(x_0, y_0)=B$，$f_{yy}(x_0, y_0)=C$，则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否取得极值的判定条件如下：

（1）$AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

（2）$AC-B^2<0$ 时没有极值

（3）$AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，需要另作讨论

证明需用到多元函数的泰勒公式，证略

4．求极值的步骤

设$f(x,y)$的二阶偏导数连续

（1）求驻点，即解方程组 $f_x(x,y)=0$，

$f_y(x,y)=0$；

（2）在每个驻点处求 A，B，C；

（3）依定理判断.

若 $AC-B^2=0$ 或偏导不存在，则用定义判别.

例1　求函数$f(x，y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值

解：先解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0, \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0. \end{cases}$

求得驻点为(1，0), (1，2), (−3，0), (−3, 2).

再求出二阶偏导数

$f_{xx}(x，y)=6x+6$，$f_{xy}(x，y)=0$，$f_{yy}(x，y)=-6y+6$

在点（1，0）处，$AC-B^2=12\cdot6>0$，又 $A>0$，所以函数在（1，0）处有极小值 f（1，0）$=-5$;

在点（1，2）处，$AC-B^2=12\cdot(-6)<0$，所以 f（1，2）不是极值;

例1　求函数$f(x，y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值

解：先解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0, \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0. \end{cases}$

求得驻点为(1，0)，(1，2)，(−3，0)，(−3, 2)

求出二阶偏导数

$f_{xx}(x，y)=6x+6$，$f_{xy}(x，y)=0$，$f_{yy}(x，y)=-6y+6$

在点（−3，0）处，$AC-B^2=-12\cdot 6<0$，所以f（−3，0）不是极值；

在点（−3，2）处，$AC-B^2=-12\cdot(-6)>0$，又 $A<0$，所以函数在（−3，2）处有极大值

f（−3，2）=31

5 多元函数的最值

依据：(1) 如果$f(x，y)$在有界闭区域D上连续，则$f(x，y)$ 在D上必定能取得最大值和最小值。

连续的一元函数在闭区间上可能最值点：

(1) 可能极值点(驻点, 不可导点)

(2) 端点

一般方法：求$f(x，y)$在D内的驻点，将$f(x，y)$在所有驻点及偏导数不存在的点的函数值，在D的边界上的最大值和最小值相比较，其中最大的就是$f(x，y)$在D上的最大值，最小的就是最小值。

其中$f(x，y)$在D的边界上的最值通常可化为一元函数的最值问题（或化为条件极值问题）。有时计算往往较复杂。

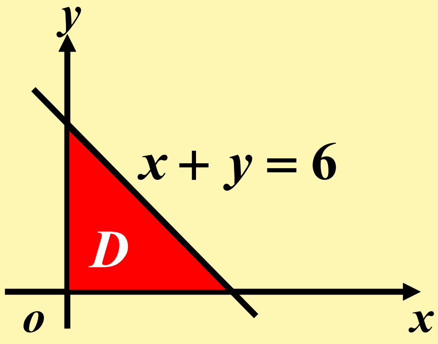
可能最值点 $\begin{cases} \text{区域}D\text{内：} & \text{求驻点} \\ \text{边界：} & \text{转化为一元函数或用条件极值} \\ \text{偏导数不存在的点} & \end{cases}$

特殊情况： 在通常遇到的实际问题中，如果根据问题的性质，知道函数$f(x，y)$的最大值（最小值）一定在D的内部取得，而函数在D内只有唯一驻点，那末可以肯定该驻点处的函数值就是函数$f(x，y)$在D上的最大值（最小值）。

例 2 求二元函数 $z = f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$， x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

解 先求函数在 D 内的驻点,

D内：$x > 0,\ y > 0,\ x + y < 6$



解方程组

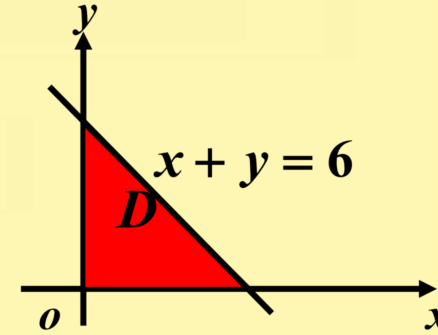
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = 0 \\ f'_y(x, y) = x^2(4 - x - y) - x^2 y = 0 \end{cases}$$

$$x = 0(\text{舍去}),\ \text{或}\ x = 2, y = 1$$

得区域 D 内唯一驻点 $(2,1)$, 且 $f(2,1) = 4$.

例 2　求$z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在直线$x+y=6$，x轴和y轴所围的闭区域D上的最值.

再求$f(x,y)$在D边界上的最值，



在边界$x=0$和$y=0$上$f(x,y)=0$,

在边界$x+y=6$上，即$y=6-x$

于是$f(x,y)=x^2(6-x)(-2)$，　$x\in[0,6]$

由　$f'_x=4x(x-6)+2x^2=0$,

得：$x_1=0$,　$\Rightarrow y=6-x|_{x=0}=6$,　$f(0,6)=0$

$x_2=4$　$\Rightarrow y=6-x|_{x=4}=2$,　$f(4,2)=-64$,

另外一个端点的函数值$f(6,0)=0$

比较后可知$f(2,1)=4$为最大值, $f(4,2)=-64$为最小值.

例3 某厂要用铁板做成一个体积为$2m^3$的有盖长方体水箱。问长、宽、高各取怎么样的尺寸时，才能使用料最省.

解：设水箱的长为x m，宽为y m，则其高应为 $\frac{2}{xy}m$

此水箱所用材料的面积 $A = 2(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\frac{2}{xy})$,

即 $A = 2(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}) \quad (x > 0, y > 0)$.

可见材料面积A是x和y的二元函数，这就是目标函数，下面求使函数取得最小值的点(x，y)

令 $A_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0, \quad A_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0.$

解这个方程组，得 $x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{2}.$

例3 某厂要用铁板做成一个体积为$2m^3$的有盖长方体水箱。问长、宽、高各取怎么样的尺寸时，才能使用料最省.

根据题意可知，水箱所用材料的最小值一定存在，并在开区域D：$x>0$，$y>0$内取得.

又函数在D内只有唯一的驻点 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$

因此可断定当 $x=\sqrt[3]{2},\ \ y=\sqrt[3]{2}$ A取得最小值

当水箱的长为 $\sqrt[3]{2}$ 宽为 $\sqrt[3]{2}$

高为 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$ 水箱所用的材料最省。

二、条件极值、拉格朗日乘数法

1. 引入

无条件极值：若对于函数的自变量，除了要限制在函数的定义域内以外并无其他条件

实际问题中，有时会遇到对函数的自变量另有附加条件的极值问题，这类极值称为条件极值。

例3 某厂要用铁板做成一个体积为$2m^3$的有盖长方体水箱。问长、宽、高各取怎么样的尺寸时，才能使用料最省.

设长宽高分别为x, y, z

求目标函数$S = 2(xy + yz + xz)$

在条件$V = xyz=2$下的最值

求目标函数$S=2(xy+yz+xz)$

在条件$xyz=2$下的最值 $z=\dfrac{2}{xy}$

$$S=2(xy+y\cdot\frac{2}{xy}+x\frac{2}{xy})=2(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y})\quad(x>0,y>0)$$

问题：（1）并不总是可化成无条件极值

（2）即使能化，但这个无条件极值问题的求解可能困难

希望：找到一种直接求解条件极值的方法，而不必化为无条件极值问题。

拉格朗日乘数法就是解决这一问题的有效方法。

2．探求方法　寻求函数　$z=f(x, y)$　(1)

在条件　$\varphi(x,y)=0$　(2)

下取得极值的必要条件。

如果函数（1）在(x_0, y_0)取得所求的极值，

首先有　$\varphi(x_0, y_0)=0.$　(3)

假设在(x_0, y_0)的某一邻域内$f(x, y)$与$\varphi(x,y)$均有连续的一阶偏导数，而$\varphi_y(x_0, y_0)\neq 0$，由隐函数存在定理可知，方程（2）确定一个单值可导且具有连续导数的函数$y=\psi(x)$,将其代入（1）式，结果得到一个自变量为x的函数$z=f[x,\psi(x)]$.　(4)

目标函数 $z=f(x,y)$ (1)

条件方程 $\varphi(x,y)=0$ (2) $\Rightarrow y=\psi(x)$

$$z=f(x,\psi(x)) \qquad (4)$$

函数（1）在(x_0, y_0)取得所求的极值，相当于函数（4）在$x=x_0$取得极值

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0, \qquad (5)$$

由(2), 用隐函数求导公式，有 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\dfrac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$.

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0 \qquad (6)$$

目标函数 $z=f(x,y)$ (1)

条件 $\varphi(x,y)=0$ (2) $\Rightarrow y=\psi(x)$

$z=f(x,\psi(x))$ (4) $\varphi(x_0,y_0)=0$ (3)

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0 \quad (6)$$

（3）、（6）两式就是函数（1）在条件（2）下在 $(x_0，y_0)$取得极值的必要条件。

设 $\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=-\lambda \Leftrightarrow f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0$

$$f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0 \quad (6)$$

目标函数 $z=f(x,y)$

条件 $\varphi(x,y)=0$

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0, \\ \varphi(x_0,y_0)=0. \end{cases} \qquad (7)$$

容易看出，（7）中的前两式的左端正是函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

的两个一阶偏导数在$(x_0,\ y_0)$的值，其中 λ 是一个待定常数。

求目标函数 $z = f(x, y)$ (1)

在条件 $\varphi(x, y) = 0$ (2)下的可能极值

拉格朗日乘数法: 先构造辅助函数

$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ 其中λ为某一常数。

求其对x与y的一阶偏导数，并使之为零，然后与方程（2）联立起来：

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

由这方程组解出x，y及λ，则其中x，y就是函数$f(x，y)$在附加条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点的坐标。

拉格朗日乘数法解题步骤:

（1）找出目标函数 $z = f(x, y)$ 和条件 $\varphi(x, y) = 0$

（2）构造辅助函数 $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

（3）$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$

（4）解出 x，y 及 λ

（5）判断可能极值点 $(x,\ y)$ 是否为最值点

3. 推广

(1) 这种方法还可以推广到自变量多于两个情况

例如，要求函数 $u=f(x, y, z)$在附加条件

$$\varphi(x,y,z)=0\text{下的极值}$$

可以先构造辅助函数

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

求满足：
$$\begin{cases} f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)=0, \\ f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)=0, \\ f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)=0, \\ \varphi(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{8}$$

的解

(2)这方法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情况

例如，要求函数 $u=f(x, y, z, t)$在附加条件

$$\phi(x,y,z,t)=0, \quad \psi(x,y,z,t)=0 \qquad (9)$$

下的极值，可以先构造辅助函数

$$F(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\varphi(x,y,z,t)+\lambda_2\psi(x,y,z,t),$$

其中λ_1，λ_2均为常数，求其一阶偏导数，并使之为零，然后与（9）中的两个方程联立起来求解，这样得出的x、y、z、t就是函数$f(x, y, z, t)$在附加条件(9)下的可能极值点

例1 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积。

解：设长方体的三棱长为x，y，z，则问题就是在条件

$$\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0 \qquad (10)$$

下求函数 $V=xyz$ ($x>0$，$y>0$，$z>0$)的最大值。

构成辅助函数

$F(x，y，z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$，

求其对x，y，z的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{cases} yz+2\lambda(y+z)=0 \\ xz+2\lambda(x+z)=0 \qquad\qquad (11) \\ xy+2\lambda(x+y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz - a^2 = 0 & (10) \\ yz + 2\lambda(y+z) = 0 & (11)-1 \\ xz + 2\lambda(x+z) = 0 & (11)-2 \\ xy + 2\lambda(x+y) = 0 & (11)-3 \end{cases}$$

因 x，y，z 都不为零，所以由（11）可得 $x = y = z$

将此代入（10）式，便得 $x = y = z = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a,$

这是唯一可能的极值点，由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得，

最大体积为 $V = \dfrac{\sqrt{6}}{36}a^3.$

例2 求内接于椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的长方体的最大体积。

解：设$M(x，y，z)$是所求长方体在第一卦限的顶点的坐标，则问题化为求函数 $V=8xyz$ 在条件 ：

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$下的最大值问题.

构造辅助函数

$$L(x,y,z)=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

求其对x，y，z的一阶偏导数并使之为零，再与条件方程联立，有

$$L(x,y,z)=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

$$\begin{cases} 8yz+\lambda\dfrac{2x}{a^2}=0 \\ 8xz+\lambda\dfrac{2y}{b^2}=0 \\ 8xy+\lambda\dfrac{2z}{c^2}=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

由其中的前3个方程可推出

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

（因为 $\lambda\neq 0$，否则$xyz=0$与题意不合），得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$ 是唯一的可能极值点，

而依题意知体积最大的内接长方体存在，

故内接长方体最大体积为 $V_{\max}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}abc.$

例3 求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$与柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xoy$面距离最近、远的点。

解法一： 设$P(x，y，z)$是交线上的一点，该点到xOy平面的距离为$|z|$。由于点P在柱面$x^2+y^2=1$上，所以有 $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$， 于是

$$z=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})\geq 5(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})>0.$$

问题化为求函数$d(x，y，z)=z$在条件

$x^2+y^2-1=0,\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1=0$下的最值问题

引入辅助函数

$$L(x,y,z)=z+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)$$

$$L(x,y,z)=z+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda x+\frac{\mu}{3}=0 & (1) \\ 2\lambda y+\frac{\mu}{4}=0 & (2) \\ 1+\frac{\mu}{5}=0 & (3) \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1=0 & (4) \\ x^2+y^2-1=0 & (5) \end{cases}$$

由（3）得 $\mu=-5$，代入（1）（2）得 $x=\frac{5}{6\lambda}, y=\frac{5}{8\lambda}$.

将其代入（5）可得 $\lambda=\pm\frac{25}{24}$,

当$\lambda=\frac{25}{24}$时，$x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}, z=\frac{35}{12}$

当$\lambda=-\frac{25}{24}$时，$x=-\frac{4}{5}, y=-\frac{3}{5}, z=\frac{85}{12}$

例3 求平面$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$与柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xoy$面距离最近、远的点。

当$\lambda=\dfrac{25}{24}$时， $x=\dfrac{4}{5}, y=\dfrac{3}{5}, z=\dfrac{35}{12}$

当$\lambda=-\dfrac{25}{24}$时， $x=-\dfrac{4}{5}, y=-\dfrac{3}{5}, z=\dfrac{85}{12}$

所以交线上距离xOy平面距离最近的点坐标为$(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{35}{12})$ 距离最远的点坐标为 $(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5},\dfrac{85}{12})$

例3 求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$与柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xoy$面距离最近、远的点。

解法二：平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$与柱面$x^2+y^2=1$交线

上的竖坐标为$z=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})$

求交线上点与xoy平面的距离可转化为

求函数 $z=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})$在条件$x^2+y^2=1$下的最值

引入辅助函数 $L(x,y)=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$L(x,y)=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})+\lambda(x^2+y^2-1)$$

解方程组 $\begin{cases} L_x=-\frac{5}{3}+2\lambda x=0 \\ L_y=-\frac{5}{4}+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$ 得 $\lambda=\pm\frac{25}{24}$,

当 $\lambda=\frac{25}{24}$ 时， $x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}, z=\frac{35}{12}$

当 $\lambda=-\frac{25}{24}$ 时， $x=-\frac{4}{5}, y=-\frac{3}{5}, z=\frac{85}{12}$

所以交线上距离 xOy 平面距离最近的点坐标为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$ 距离最远的点坐标为 $(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},\frac{85}{12})$

例4 求$z=x^3+y^3$在D：$x^2+y^2\leqslant 1$上的最大值和最小值。

解：函数$z=x^3+y^3$在有界闭区域 $x^2+y^2\leqslant 1$上一定可取得最大值和最小值

区域内部 $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$：求驻点

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2=0 \end{cases}$$

唯一驻点为(0，0)。

该点的函数值为$z(0，0)=0$

在D的边界上求$z=x^3+y^3$的极值. 条件：$x^2+y^2=1$

用拉格朗日乘数求解，

引入辅助函数 $L(x,y)=x^3+y^3+\lambda(x^2+y^2-1)$

例4 求$z=x^3+y^3$在D：$x^2+y^2\leqslant 1$上的最大值和最小值。

$$\begin{cases} L_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_y = 3y^2 + 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1)\times y-(2)\times x$$

$$\Rightarrow xy(x-y)=0$$

得 $x=0, y=\pm 1;\ y=0, x=\pm 1$

或 $x=y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

计算这些点的函数值:

$$z(0,1)=z(1,0)=1,\quad z(-1,0)=z(0,-1)=-1$$

$$z\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

又 $z(0，0)=0$ 所以 最大值为1，最小值为－1。

例4 求$z=x^3+y^3$在D：$x^2+y^2\leqslant 1$上的最大值和最小值。

解法二： 在D的边界$x^2+y^2=1$上求

$z=x^3+y^3$的极值 令$x=\cos\theta, y=\sin\theta$

把$z=x^3+y^3$转化为一元函数$z=(\cos\theta)^3+(\sin\theta)^3$

求极值

可能最值点
- 区域D内： 求驻点
- 边界： 转化为一元函数或用条件极值
- 偏导数不存在的点